Bölüm 1

Giriş

1.1 Matematikte Kesinlik

Matematiği diğer uğraşlardan ayıran harika bir özelliği var: *kesinlik*. Buradaki kesinlik ile ne kast edildiği yanlış anlaşılabiliyor, o yüzden biraz daha açalım. "Matematik sadece kesin olan şeyleri konu eder." ya da "Matematikteki bir sonuç her koşulda kesin olarak geçerlidir." olarak yorumlarsak hataya düşeriz. Matematik elbette yazı tura atma, zar atma gibi şansa bağlı, ihtimal içeren konularda da kesin hükümler verebilir. Para atarsanız kesin yazı gelir, ya da kesin tura gelir demesi düşünülemez tabi. Ama hilesiz bir paradan bahsediyorsak, yazı gelme ihtimali de tura gelme ihtimali de bir bölü ikidir. Bu kesin bir hükümdür.

Bir de "*iki doğru ya kesişir, ya paraleldir*" iddiasına bakalım. Bir insanın kolayca kabul edebileceği bu iddia aslında çok kısıtlı şartlar altında doğrudur, sadece Öklid geometrisinde aynı düzlemde olan doğrular için geçerlidir. Örneğin şu iki doğruya bakın: odanın bir duvarının zemin ile buluştuğu yerdeki doğru ve bir yandaki duvarın tavan ile buluştuğu yerdeki doğru. Bunlar ne kesişirler, ne de paraleldirler. Yani ortaya atılan iddia üç boyutta doğru değil. Peki o halde matematikte var olduğu iddia edilen kesinlik nedir?

Matematik bir takım varsayımlardan başlayıp çıkarımlar yaparak bu varsayımların sonuçlarına ulaşır. Çıkarım yapmak için herkes aynı kuralları kullanır: klasik mantık kuralları. Bu kuralların evrensel olmasından dolayı aynı varsayımla yola çıkan herkes aynı sonuçlara ulaşmak zorundadır. Birincisi bu anlamda bir kesinlikten bahsedilebilir. Bir A noktasından yola çıkan herkes, aynı yolda ilerleyeceği için mutlaka B noktasına varacaktır. Yani matematiğin kuralları açık ve nettir. Nasıl ki satrançta her taşın yapabileceği hamleler kesin olarak belirlenmişse, matematiğin hamleleri de kesin olarak belirlenmiştir. Kimse atı alıp üç kare ileri taşıyamaz. Taşımaya kalkarsa mantık hatasına düşer ve yanlış sonuçlara varır. Ve oyunu izleyen birisi hemen bu hatayı fark edebilir. Ama başlangıç noktanız farklı ise, tabi ki hamleleriniz sizi başka yerlere götürebilir.

1.2 Matematiksel Kanıt

İkinci bir anlamda kesinlik ise matematikte kanıt olmasından kaynaklıdır. Ve bu kanıt, ispat ya da delil, polisiye romanlardaki suçlunun kim olduğuna dair kanıttan, ya da suyun yüz derecede kaynadığının kanıtından farklıdır. Çünkü bir suç işlenmişse kimse gerçekten geçmişe gidip kontrol edemez, ve kimse gelecekteki her denemede suyun yine yüz derecede kaynayacağını garanti edemez. Bu iki durum için de insanları ikna etmek çok zor olmayabilir, ancak bunun hiç bir önemi yok, çünkü insanlar kandırılabilirler. Tarihte boş yere hüküm giymiş, hapis yatmış pek çok insan vardır. Herkesin suçluluğu kanıtlanana kadar masum olduğunu düşünürsek, tarihte birileri masum insanların aslında suçlu olduklarının kanıtlandığına hükmetmişler. Zaten ülkemizde kandırılma konusuna örnek bulmak hiç zor değil, başkalarını kandırarak isim yapmış ünlü dolandırıcıların olduğu bir ülkede yaşıyoruz. İnsanları kandırmak mümkün olduğuna göre, matematikte kesin bir kanıt sunmak nasıl mümkün olabilir?

Cevap aslında çok basit: insani öğeleri ortadan kaldırarak. İnsan zihninin mantıksal çıkarımlar yapma yetisi vardır, ancak bu bir eğitim ve çaba gerektirir. Günlük hayatta insan davranışı mantıklı olmaktan uzaktır, duygular, iç güdüler gibi zihinsel disiplinden kopuk öğelerin de tesiri altında kalır. Örneğin heyecana ya da öfkeye kapılıp sonradan düşündüğümüzde pişman olacağımız davranışlarımız olabilir. Oysa "geçen gün bir kanıt yaptım, çok pişmanım" diyen olmaz. Matematikteki kanıtlardan insani öğeleri çıkarmak demek, kanıtın geçerliliğini, onu yazan, okuyan ya da düşünen kişiden bağımsız hale getirmek demek. Bunu yapmak için ne anlama sahip olduğu kesin olarak tanımlanmış semboller, ifadeler kullanmak ve mantıksal çıkarımları mekanik hale getirmek gerek. 19. ve 20. yüzyılın büyük matematikçisi David Hilbert de tam olarak bunu hedefliyordu: dayanak olarak kullanılacak basit birkaç ilkeden yola çıkarak bütün matematiği mekanik bir şekilde üretebileceğimiz bir sistem kurmak. Günümüzde bilgisayarlarla kanıt üretmeye ya da yazılmış bir kanıtı kontrol etmeye yarayacak yazılımlar üzerine çalışıyor. Bunu başarmak için gereken ilk adım mantıksal çıkarımı mekanik hale getirmek.

Oyunun kurallarını zeka sahibi olmayan bir bilgisayarın da oynayabileceği şekilde koyduğumuz zaman insani öğeleri aradan çıkarmış oluyoruz. Bu saatten sonra oyunun başlangıç pozisyonunu belirleyince, yapılabilecek hamleler belli olduğu için, oyunun olası bütün konfigürasyonları da belirlenmiş oluyor. Oyunu kimin oynadığı önemli değil, bir bilgisayar da oynayabilir, mekanik olarak kurduğumuz bir alet de. Sonuçta hepsi aynı şekilde oynamak zorunda. Burada satranç benzetmesi artık yetersiz kalıyor, çünkü matematik iki kişinin karşılıklı oynadığı bir oyun değil, tek kişilik bir oyun. Üstelik bir hamle yaparak kimi hamleleri kısıtlamak da söz konusu değil. Tek bir satırdan oluşan bir satranç tahtası düşünün, tek bir oyuncusu var, oyuncunun tek bir piyonu var. Piyon her seferinde sadece bir kare ileriye gidebiliyor. Burada artık kişisel tercihe de, yanlış hamleye de yer yok.

Matematiksel kanıt da nihayetinde bir ikna gerektirir. Ama ikna etmeye çalıştığımız belli bir kişi de değil, geçmişte yaşamış, bugün yaşayan ve gelecekte yaşayacak bütün insanlar, bu oyunu öğretebileceğimiz bütün bilgisayarlar. Kurmaya çalıştığımız zihinsel bir sistem. İşte matematikteki kesinlik buradan kaynaklı. İnsanoğlu zaman içerisinde turnayı gözünden vurdu ve bu sistemi buldu. Daha güçlü bir şey düşünmek çok zor.

Kanıt insani öğelerden arındırılmıştır dedik. Ama yine yanlış anlaşılmasın, insanı ikna etme konusunda üstüne yoktur, hiç bir şüpheye yer bırakmaz. Hatta öyle güzel ikna eder ki bir kanıtı okuduğunuzda tatmin duygusu hissedersiniz. İnsanlar bu sistemi anlayabilecek ve sunulan kanıtların sisteme uyumlu olup olmadığını kontrol edebilecek yetilere sahipler. Ve insan bu sistemin içine başka şekillerde de dahil olur: oyunun başlangıç pozisyonunu seçme özgürlüğümüz var! Bu da aslında şu anlama geliyor: ortada bir tane matematik yok, başka türlü matematik üretmek de mümkün. Okullarda okutulan ise genel kabul gören, ana akım diyebileceğimiz bir matematiktir. Oyunun başlangıç pozisyonu ZFC kümeler kuramının aksiyomlarıdır. Ama başka başlangıç pozisyonlarına karşılık gelen başka matematikler de var. Hatta bazılarında sadece başlangıç pozisyonu değil, oyundaki hamleler de değişebilir. Klasik mantık yerine bulanık mantık ya da üçüncü halin olmadığı mantık kuralları da kullanılabilir. Ama kurallar belirlendiğinde, başlangıç pozisyonu belirlendiğinde artık bütün sonuçlar bellidir. (Bu yazıda elimizde çelişki olmayan bir sistem olduğunu varsaydık. Eğer piyon her seferinde bir kare ileri gidebilir, ve her seferinde en az iki kare ileri gitmeli gibi çelişkili kurallar varsa o oyuna güven olmaz.)

1.3 Kanıtın Önemi

Matematiksel kanıtın neden kesin olduğundan bahsettik. Biraz da öneminden bahsedelim. İnsan zihni çok hareketlidir, sürekli yeni düşünceler üretir. Bunların bazıları akla çok yatkındır, mantığa hitap eder. Bazıları sanki doğru olabilir gibi gelir, ancak ilk başta emin olamayız. Bazılarını kendimiz anlamakta bile zorlanırız, ve tam olarak ifade edemeyiz. Her durumda bir kanıt yazmak, düşüncenin doğruluğunu sonsuza kadar onaylar. Bir kere kanıtlanan bir sonuç, binlerce yıl sonra da geçerliliğini korur, ölümsüz hale gelir. İnsanoğlunun en ayırt edici özelliklerinden birisinin nesilden nesile bilgi aktarabilmek olduğunu düşünürsek bu muazzam bir durum. Yine de matematikte kanıt her şey değildir. Matematikte kanıt, son adımdır. O adıma ulaşmak ayrı bir çaba gerektirir.

Bir kere bir iddianın kanıtlanabilmesi için, ortada bir iddia olmalıdır. Bu iddia 'canım sıkılıyor' gibi öznel bir konuda değil, iyi tanımlanmış matematiksel nesneler ile ilgili olmalıdır (burada 'canım' nedir ve 'sıkılıyor' nedir?). 'Üçgen karedir' iyi bir başlangıç, üçgeni de kareyi de matematiksel olarak tanımlayabiliriz. Ancak bu tanımları yazdıktan sonra iddianın saçma bir iddia olduğu hemen ortaya çıkar. Dolayısıyla iddianın biraz da elle tutulur bir yanı olması gerekir. Böyle iddialar ortaya koymak hiç de kolay değil. İsterseniz okulda henüz geometri görmemiş birisine 'üçgen'i ve 'iç açıları' tanımlayın, ve 'üçgenin iç açıları toplamı'nı sorun. Bir kenarı a, bir kenarı

b olan karelerin alanını nasıl bulduğunuzu söyleyin, ve bir kenarı $a + b$ olan karenin alanını diğerleri cinsinden sorun. Burada ortada iddianın iskeleti var, boşlukları doldurmaya çalışıyoruz. Ama öncesinde birisinin bu iskeleti kurması da gerek. Örneğin geometrik eğriler ile cebirsel polinomların bağlantılı olabileceğini düşünmesi gerek. Buna matematiksel yaratma süreci diyelim. Matematik yaratmak hiç de kolay değildir, çünkü bunun reçetesi yok. Bu açıdan bakılınca kanıt yapmak görece daha kolay. Çünkü kanıtların nasıl yapılacağına dair reçeteler vardır. Bu kitabın konusu da bu: Kanıt yöntemleri.

Bir matematikçi ne kadar kanıt yöntemi bilirse, elindeki sorunun kabuğunu kırıp içindeki ödüle ulaşması için o kadar çok aleti var demektir. Mandalinayı elle soymak çok kolaydır, ancak karpuz için bıçak gerekir. Hindistan cevizi içinse başka aletler gerekir. Bu kitabı okuyanlara yaygınca kullanılan kanıt yöntemlerini tanıtmayı, ve bunların iş üzerinde nasıl kullanıldığını pek çok örnek üzerinden göstermeyi hedefliyoruz. Matematiksel içeriği çok derin olmayan, daha çok sayılar kuramı ve kombinatorik alanından önermeler üzerinde bu kanıt yöntemlerini uygularken amacımız aletleri tanıtmak ve ön plana çıkarmak. Bir aleti kullanmada ustalık kazanmak için bol bol alıştırma yapmak gerekir. Okura da tavsiyemiz, kanıtları okumadan önce eline yeni tutuşturulmuş alet ile acemice de olsa işe kendi girişmesidir. Bu uğraştan sonra kanıtlamakta başarısız olsa bile, kanıtı okuduğunda daha derin bir anlayışa sahip olacaktır, neyi yanlış ya da eksik yaptığını görüp gelecekteki soruların karşısına daha iyi bir matematikçi olarak çıkacaktır.

Matematiğin kanıttan ibaret olmadığının, ortaya kanıtlanacak önermeler koymak, ondan da önce söz konusu nesneler ile ilgili anlamlı sorular ortaya atmak gibi yaratıcılık ve derin düşünme becerisi isteyen yanlarının da olduğunun altını bir kez daha çizelim. Sadece kanıttan ibaret bir matematik mümkün değil, ancak matematiği kanıtsız yapmak da mümkün değil. Bu kitap sadece kanıt yöntemlerini öğretmeyi amaçlıyor. Matematiksel soru sorma, iddia ortaya atmaya dair önerebileceğimiz bir Türkçe kaynak George Polya - Nasıl Çözmeli.