

Bölüm 2

Günlük Dilde Mantık

Bu yazıları klasik önermeler mantığını bilenleri gözeterek yazıyoruz. Lise birinci sınıfın ilk konusu olan önermeler mantığı, matematikte anlamlı birer cümle olan önermelere doğruluk değeri verir (yanlışsa 0, doğruysa 1). Nasıl ki cümleleri bir araya getirip daha uzun cümleler kurabiliyorsak, iki önermeyi bir araya getirip daha uzun bir önerme elde etmek de mümkün. Önermeler mantığı iki önermenin ne şekillerde bir araya gelip yeni bir önerme oluşturacağını ve elde edilen önermenin doğruluk değerinin ne olacağını söyler.

Burada kısaca matematikteki önermeler mantığı ile günlük dilde kullanılan mantığın farkından bahsedeceğiz. En kolay bir örnek ile başlamak. Matematikte “5 sayısı 10’u böler” dediğimiz zaman çok kesin bir şey ifade ederiz, ama kapsayıcı bir şey ifade etmeyiz. Mesela 10’u bölen tek sayının 5 olduğu gibi bir şey söylemedik. 5 sayısının 10’u böldüğünü söyledik ama başka sayıların 10’u bölebileceğine ya da bölemeyeceğine dair hiçbir iddiada bulunmadık. Eğer 10’u bölme özelliğine sahip bütün tamsayılardan bahsetmek istersek bunu “10’un tüm tamsayı bölenleri $-10, -5, -2, -1, 1, 2, 5$ ve 10’dur” şeklinde ifade ederiz. Oysa günlük dilde “Akşam yemekte kuru fasulye ve pilav var” dediğimizde kapsayıcı konuşuruz. Eğer yemekte köfte de olsaydı, onu da söyledik. Köfteden bahsetmediğimizde, akşam yemekte köfte yok anlamı da çıkıyor. Yani cümlemiz sadece içinde bahsi geçen şeyler hakkında değil, aynı zamanda içinde bahsi geçmeyenler hakkında da bilgi veriyor. Aynı cümleyi matematiksel mantığa uygun şekilde kurmamız gerekseydi “Akşam yemekte sadece kuru fasulye ve pilav var, başka bir şey yok” dememiz gerekirdi. Lafı uzatmamak adına, bunu ifade etmek için kısaca “Akşam yemekte kuru fasulye ve pilav var” deriz. Tabii arada gıcık bir arkadaşımızla şu diyalogu da yaşayabilirsiniz:

- Abi köfte de varmış, niye söylemedin?
- Ben köfte yok demedim ki.

Ya da şu diyalogu düşünün:

- Yarın buluşalım mı?
- Olur, akşam bize gelsene.
- Öğlen buluşsak olmaz mı?
- Ben öğlen buluşmayalım demedim ki, sadece akşam bize gel dedim. Bu öğlen buluşmamıza engel değil.

Akşam yemeği örneğine dönecek olursak, matematiksel mantık ile günlük dildeki fark bir yandan da *varlık* meselesinden kaynaklanıyor. Günlük hayatta gördüğümüz, kokladığımız, yediğimiz, içtiğimiz şeylerin varlığını sorgulamıyoruz, onları var olarak kabul ediyoruz. Hatta varlığı bu deneyimlerimiz üzerinden tanımlıyoruz. Dolayısıyla da var olan şeyler üzerinden konuşuyoruz. Eğer sofrada üçüncü bir çeşit yemek görmüyorsak, sofrada o yemek var olmadığı için görmüyoruz. Ve var olmayan şeyler çok daha fazla olduğu için, sadece var olanlardan bahsediyoruz. Böyle yaparak hem neyin var olduğunu, hem de neyin var olmadığını ifade etmiş oluyoruz.

Oysa matematiksel nesnelere hiçbirini beş duyumuzla algılamadığımız için hiçbirini yok. 5 sayısı 10'u bölüyor tabii, ama ortalıkta ne 10 var ne de 5. Yani zaten var olmayan şeyler hakkında konuşuyoruz. Bu durumda hem var olan, hem var olmayan şeylerden tek bir cümle ile bahsetmek söz konusu değil. Bunun altında yatan bir sebep de matematik dünyasının tamamına dair bir fikir sahibi olmamamız. Genelde aradığımız soruya çözüm olabilecek başka matematiksel nesnelere de olur, ama biz onların varlığından haberdar olmayabiliriz. Ortalıkta o nesnelere görmememizin sebebi var olmamaları değil, bizim bilgisizliğimiz de olabilir. Örneğin "İkinin karesi dördtür" diyen birisi, eğer negatif sayıları henüz öğrenmemişse karesi dört olan tek sayının iki olduğunu düşünüyor olabilir ama biz onun cümlesini "Karesi dört olan bir sayı biliyorum, iki. Başka var mı yok mu bilmiyorum" olarak anlarız. -2 adında başka bir çözüm olabileceği ihtimalini yok saymıyoruz.

Varlıkla ilgili bu temel fark, günlük dildeki mantıkta ve matematiksel mantıkta nicelikleri de farklı kullanmamıza sebep olabiliyor. Bu ay beş kitap okumuş birisi hakkında "Bu ay bir kitap okumuş" dersek teknik olarak doğru olur çünkü okuduğu bir kitap gösterebiliriz. Ve tabii "Bu ay iki/üç/dört/beş kitap okumuş" cümleleri de teknik olarak doğrudur. Ama biz genelde böyle bir cümle kurarken bu ay tam olarak kaç tane kitap okuduğunu söyleriz. Matematikte ise, bazen toplam sayıyı bilmediğimiz için, bazen de toplam sayıyla ilgilenmediğimiz için "30 sayısının asal olmayan bir böleni vardır" demek çok yaygındır, gerçekte 30'un daha fazla böleni olsa bile. Çünkü sadece bu özelliklere sahip bir sayının var olup olmadığı ile ilgileniyor olabiliriz. Benzer bir şekilde "Yolculuk 30 dakika zamanımı aldı" diyen birisi teknik olarak "Yolculuk 10 dakika zamanımı aldı" dese de doğruyu söylerdi, ama biz yolculuğun toplam 10 dakika sürdüğü izlenimine kapılırdık. Oysa matematikte bir sayıyı bölen otuz sayı varsa, o sayıyı bölen on sayı da vardır, bir sayı da vardır ve bu cümleleri kurarsak yanlış bir izlenim uyandırmayız. Matematikçiler tam olarak ne kast edildiğini anlarlar: Bu sayının en az şu kadar böleni var, daha fazla da olabilir ama bu konuda bir şey söylenmemiş.

“ p ise q ” şeklindeki önermeler hakkında da bir şeyler daha söylesek iyi olur, bu da çok kafa karışıklığına yol açan bir konu. Diyelim ki çok prensipli birisiniz, ve hiç taviz vermeyeceğiniz prensiplerinizden birisi “Yağmur yağıyorsa şemsiye taşımak”. Bu durumda sizin diğer bir prensibinizden bihaber olan ya da matematiksel mantık bilmeyen yakınlarınız, sizin elinizde şemsiye yoksa yağmur yağmaması gerektiğini düşünebilirler. Oysa sizin hiç bozmadığınız diğer bir prensibiniz “Yağmur yağmıyorsa şemsiye taşımak”tır. Yani siz her zaman şemsiye taşıyan biri olabilirsiniz, ve bu durumda “Yağmur yağıyorsa şemsiye taşıyorum” diyerek doğru bir önerme ortaya koyarsınız. Ama bu cümleler günlük hayatta “Ben yalnızca yağmur yağdığında şemsiye taşıyorum” olarak algılanabilir.

Diğer önemli bir konuysa yanlış bir önerme ile başlayıp bir çıkarım yapmak. Önermeler mantığında yanlış bir önerme ile başlayıp doğru bir önermeye ulaşırsak, bu işin bütününe doğru olarak görürüz. Örneğin “ $1 + 1 = 5$ ise $2 \times 2 = 4$ ” önermesi mantıkta doğru kabul edilir. Daha kafa karıştııcı bir örnek olan “ $1 + 1 = 5$ ise $1 + 1 = 2$ ” önermesi de doğru kabul edilir. Önermeler mantığı görmemiş birisi haklı olarak bu iddialar karşısında şaşkınlığa düşüp “Saçmalama lütfen, bir artı bir beş değil ki bu dediklerin doğru olsun” diyecektir. Hatta bir adım öteye gidip “Eğer böyle mantıksız konuşacaksak, ben de $1 + 1 = 5$ ise iki tarafa da bir ekleyip $2 + 1 = 6$ olduğunu ortaya atarım.” diyebilir ve bu iddiası önermeler mantığında doğrudur! Yanlış bir önermeden yola çıkıp yanlış bir önermeye varmak, doğru kabul edilen bir mantıksal çıkarım kuraldır. Siz siz olun, işe yanlış bir önerme ile başlamayın. Çünkü yanlış bir önermeden yola çıkarak her sonuca varabilirsiniz, üstelik hep doğru mantıksal adımlar atarak. Bu konuda ünlü bir hikaye bu konuyu derste anlatan Bertrand Russell ve öğrencisi ile ilgilidir:

Russel: Yanlış bir önermeden yola çıkarak her şeyi kanıtlayabilirsiniz.

Öğrenci: O zaman $1 = 0$ 'dan yola çıkarak bana Papa olduğunuzu kanıtlayabilir misiniz?

Russel: Tabi, önce iki tarafa da bir eklersek $1 = 2$ olur. Şimdi sadece Papa ve beni içeren bir küme düşünün. Bu kümenin iki elemanı var, ama $2 = 1$ olduğu için aslında kümenin tek elemanı var. Yani ben Papa'yım.

Kısacası matematiksel mantık ile günlük hayattaki mantık biraz farklı çalışıyor. Eğer önermeler mantığı konusunda kendinize çok güvenmiyorsanız ya da bir hatırlama ihtiyacı hissediyorsanız önce bu konunun anlatıldığı bir kaynağa göz atmanızı öneririz. Çünkü kurallarımı bilmediğiniz bir oyunu takip etmek çok zordur. Aşağıdaki kitaplarda önermeler mantığı hakkında gerekli temel bilgileri bulabilirsiniz:

- *Ali Nesin - Önermeler Mantığı*
- *Ahmet Çevik - Matematik Felsefesi ve Matematiksel Mantık* / (pdf)
- *Richard Hammack - İspat Yöntemleri* / (pdf)