Bölüm 3

Genel Terimler ve Semboller

Bu bölümde, önümüzdeki yazılarda bol bol kullanacağımız kimi matematiksel terimlerin ve sembollerin ne ifade edeceğini kısaca açıklayacağız. İleride kafanızı karıştıran bir sembol ya da terim olursa geri dönüp bu bölüme başvurabilirsiniz.

- **Tanım** - İlk defa kullanacağımız bir terimi, önceden bildiğimiz kavramlar cinsinden, bir muğlaklığa yer bırakmayacak şekilde, gereksiz öğelerden arındırılmış olarak tarif etmek.

- **Önerme** - İyi tanımlanmış matematiksel kavramlarla ilgili olan, doğru ya da yanlış doğruluk değerinden birisini alabilen matematiksel cümle.

- **İspat** - Bir önermenin ispatı, önermedeki varsayımdan yola çıkarak mantıksal çıkarımlar ile önermede iddia edilen sonuca ulaşan ara adımlardan oluşur. Eğer varsayım doğru ise, mantıksal çıkarım hatası yoksa, ulaşılan sonucun doğruluğu ispatlanmış olur.

- **Aksiyom** - İspata gerek duymadan doğruluğunu kabul ettiğimiz önerme. Bütün bir teoriyi temellendirmek için böyle dayanak noktaları kullanırız.

- **Teorem** - Aksiyomlardan yola çıkarak mantıksal çıkarımlarla doğruluğunu ispatladığımız önermelere teorem denir.

  Not 1: Aksiyomların kendi başlarına doğruluk değerleri yoktur, biz onları doğru varsayıp yola devam ederiz, bir teori inşa ederiz. İstersek aynı aksiyomların tam tersini doğru kabul edip başka bir teori de inşa edebiliriz. Örneğin klasik Öklid geometrisi 5 *aksiyoma dayanır. Uzun süre beşinci aksiyomun ilk dördünün bir sonucu olduğundan şüphelenen matematikçiler bu iddialarını kanıtlamaya çalışırken ilk dört aksiyomun geçerli olduğu, ve beşinci aksiyomun daha farklı olduğu Öklid-dışı geometrilerin varlığını keşfettiler. Bu geometrilerden hangisi doğru anlamsız bir soru. Hepsi başka durumlarda geçerli teoriler.*

Not 2: Bir takım aksiyomlara dayalı bir teori inşa edeceksek, bu aksiyomların birbiri ile çelişmemesini isteriz. İlk aksiyomumuz P, ikincisi P'nin tersi ise, ortaya çıkacak teori çelişkilerle dolu olacağı için bir işe yaramaz. İçinde çelişki olmayan teorilere "tutarlı" deriz. Bir aksiyom sisteminin tutarlı olup olmadığını kontrol etmekse kolay bir iş değildir.

3.1 Semboller

- $x \in A$: Bir A kümesi için "x, A'nın elemanıdır."
- $\mathbb{N}$: Doğal sayılar kümesi $\{0, 1, 2, \dots\}$
- $\mathbb{Z}$: Tamsayılar kümesi $\{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$
- $\mathbb{Q}$: Rasyonel sayılar kümesi
- $\mathbb{R}$: Reel sayılar kümesi
- $\forall x \in A$: A kümesindeki her x elemanı için
- $\exists x \in A$: A kümesinde öyle bir x elemanı var ki
- $\exists! x \in A$: A kümesinde öyle bir ve sadece bir x elemanı var ki
- $\neg P$: P önermesinin değili
- $P \wedge Q$: P önermesi ve Q önermesi
- $P \vee Q$: P önermesi veya Q önermesi
- $P \implies Q$: P önermesi ise Q önermesi

Bölüm 4

Doğrudan İspat

Bu bölümde kanıt yöntemlerinden en sadesi, insanın aklına ilk gelecek olan *doğrudan ispat*ı tanıtacağız. Amacımız "P ise Q" şeklindeki koşullu ifadelerin doğruluğunu kontrol etmek. "P ise Q" demek, aslında "Eğer P önermesini varsayarsak, o zaman mantıksal olarak Q önermesine ulaşırız." demektir. Biz de P'den yola çıkıp Q'ya varacak dümdüz, doğrudan bir (mantıksal) yol arayışında olacağız.

"P ise Q" koşullu ifadesinde P'ye **hipotez/varsayım**, Q'ya da **sonuç/çıkarım** deriz. Örnek üzerinde görmek istersek:

Önerme: n pozitif bir tamsayı ise ilk n pozitif tamsayının toplamı $\dfrac{n \times (n+1)}{2}$'dir.

Varsayım: n pozitif bir tamsayıdır.

Çıkarım: İlk n pozitif tamsayının toplamı $\dfrac{n \times (n+1)}{2}$'dir.

Gördüğünüz üzere bize koşullu bir önerme verildiğinde, kanıta başlayacağımız yer ve kanıtı bitireceğimiz yer verilmiş oluyor. Bize düşen aradaki köprüyü kurmak.

Yazıların kalanından fayda sağlamanız için size birkaç ufak önerimiz olacak. Her ispat yöntemi için kanıtlarına yer verdiğimiz birçok teorem örneği göreceksiniz. Bu örnekleri roman okur gibi okuyup geçmektense bolca pratik yapabilmeniz için hazırladık. Bir teoremi okuduktan sonra kanıtına bakmadan önce kendi başınıza kanıtlamaya çalışmanızı şiddetle öneriyoruz. Teoremlerin iddialarının önemi çok az, sizin teorem kanıtlamayı öğrenmenizin önemiyse çok fazla. Gerekirse bir teoremin ispatı üzerinde saatler geçirin, olmazsa günler geçirin, zararını değil, faydasını görürsünüz.

4.1 Doğrudan İspat

Doğrudan ispatın yapısı şu şekildedir:

Varsayım: P'yi varsayalım.
⋮
Çıkarım: O halde Q sağlanır.

Aradaki adımlarda tanımlara, daha önce kanıtladığımız teoremlere başvurup mantıksal çıkarımları kullanarak sonuca ulaşmak istiyoruz. Basit bir sonuç üzerinde bu yöntemi uygulayalım.

Teorem 4.1.1. *n bir tek tamsayıysa, n^2 de tek tamsayıdır.*

Not: Şimdi göreceğiniz üzere insanın "bu zaten doğru ki" diye düşündüğü iddiaların kanıtlarını yazması hiç de kolay değildir. Aşağıdaki kutuya teorem hakkındaki düşüncelerinizi, kanıtlamak için ne kullanabileceğinizi ve eğer bir çıkar yol görüyorsanız kanıtınızı yazabilirsiniz.

İlk düşünceler:

Örnek ilk düşünceler

Bunda kanıtlanacak ne var, ilkokuldan beri biliyoruz. Tek sayılar $\{\dots, -3, -1, 1, 3, 5, \dots\}$ kümesinin elemanları. Örneğin $(-3)^2 = 9$, $(-1)^2 = 1$, $1^2 = 1$, $3^2 = 9$, $5^2 = 25$. Bütün tek sayıların karelerinin de tek tamsayı olduğu kolayca görülüyor. İnanmayan herhangi bir tamsayı seçip deneyebilir.

Bu düşünce zinciri matematiksel bir kanıt değil. Ama bu, hiçbir değeri yok demek değil. Genelde bir iddiayı ele aldığımızda doğru olup olmadığını önceden bilmeyiz. Kanıta başlamadan önce doğru olduğunu mu kanıtlayacağız, yanlış olduğunu mu, bu konuda bir fikir sahibi olarak ilerlemek gerek. Bu ilk düşünceler bize iddianın doğru olmasının daha olası olduğunu söylüyor. O halde bunu birkaç örnekte doğrulamakla kalmayacak, her tek tamsayı için şüpheye yer bırakmayacak şekilde ortaya koyacak bir açıklama yazmaya çalışalım. Sonunda kanıtımızı şuna benzetmek istediğimizi hatırlayalım:

Varsayım: n bir tek tamsayı olsun.
$\vdots$
Sonuç: O halde n^2 de bir tek tamsayı olur.

1. Deneme:

Varsayım: n bir tek tamsayı olsun.
Tek tamsayılar 2'ye tam bölünmeyen, 2'ye bölümlerinden 1 kalan tamsayılardır.
O yüzden n tamsayısı 2'ye tam bölünmüyorsa n^2 tamsayısı da ikiye tam bölünmez.
Sonuç: O halde n^2 de tek tamsayıdır.

Bu deneme çok daha iyi. Öncelikle tek tamsayıları üç nokta koyarak, "işte bunlar gibi sayılar" olarak ele almaktansa onları sadece tek tamsayıların sağladığı matematiksel bir kriter ile ifade ediyor. Elimizde böyle ifadeler, yani söz konusu olan kavramların matematiksel tanımları yoksa kanıtları yapamayız. Matematik, sadece matematiksel olarak iyi tanımlanmış nesnelerle ilgili çıkarımlar yapabilir. Tek sayıların bir tanımını vererek güzel bir başlangıç yapan ilk deneme, maalesef şüpheye yer bırakmayan açıklama konusunda tembele kaçıyor. n sayısı 2'ye tam bölünmüyorsa, n^2'nin de 2'ye tam bölünmeyeceğini iddia ediyor, ama buna bir gerekçe göstermiyor. Yani aslında tek yaptığı, iddiayı başka bir şekilde ortaya atmak. Hala ortada kanıt yok.

2. Deneme:

Varsayım: n bir tek tamsayı olsun.
Tek tamsayılar 2'ye tam bölünmeyen, 2'ye bölümlerinden 1 kalan tamsayılardır.
Şimdi n tamsayısının 2'ye tam bölünmediğini varsayalım, ve n^2 tamsayısının da ikiye tam bölünmediğini gösterelim.
n'nin 2'ye bölümünden kalan 1.
n^2 de $n \times n$ olduğu için, bunun 2'ye bölümünden kalan da $1 \times 1 = 1$ olmalı.
Sonuç: O halde n^2 de tek tamsayıdır.

Bu neredeyse bir kanıt. Tek tamsayıların tanımını veriyor, iddianın varsayımı ile yola çıkıp mantıksal çıkarımlar yapıyor ve sonuca ulaşıyor. Tek pürüzü, mantıksal çıkarımının başka bir iddiaya dayanıyor olması:

İddia: Eğer a_1'in n'ye bölümünden kalan k_1, a_2'nin n'ye bölümünden kalan k_2 ise o zaman $a_1 \times a_2$'nin n'ye bölümünden kalan $k_1 \times k_2$'dir. [1]

Bu, doğruluğu kontrol edilmesi gereken başka bir iddia. O yüzden kanıt tamamlanmış sayılmaz. Burada isteyen okurlar bu ara dayanak noktasını kanıtlamayı veya yanlış olduğunu göstermeyi deneyebilirler. Bunun için bölme ile ne kast edildiğini açıkça yazmak ve bölünen sayılar ile yapılan işlemlerle kalanlar ile yapılan işlemlerin uyum içinde olduğunu göstermek gerek.

Eğer bu yol uzun ve zahmetli görünüyorsa kendinize şu soruyu sormalısınız: Acaba kanıtı yazarken işimi kolaylaştıracak başka bir tek tamsayı tanımı kullanabilir miyim?

Matematikte bir kavramı tanımlamanın birden fazla yolu olabilir. Bu tanımlar aynı nesneyi tarif ediyorlarsa onlara "denk tanımlar" denir. Bir nesne için elimizde birden fazla birbirine denk tanım olması hem düşünme sürecinde, hem kanıt yazma sürecinde çok işe yarayabilir. Elimizdeki örnekte tek tamsayıların tanımını daha karmaşık olan bölme işlemi yerine, çarpma işlemi ile verirsek işlerin nasıl kolaylaştığını görelim.

Tanım 4.1.1. *Bir n tam sayısı eğer bir a tamsayısı için $n = 2a + 1$ eşitliğini sağlıyorsa n'ye tek denir.*

Bu tanımın "2'ye bölümünden 1 kalan tamsayılar tektir" tanımı ile denk olduğu görebiliyor musunuz? Fakat bu sefer bölme işleminden bahsetmiyoruz, sadece çarpma ve toplama var.

Kanıt.
Varsayım: n'nin bir tek tamsayı olduğunu varsayalım.
Tek tamsayının tanımı: Bu durumda $n = 2a + 1$ eşitliğini sağlayan bir a tamsayısı olmalı.
Şimdi n^2'nin de tek tamsayı olduğunu göstermek istiyoruz.
Yani tek tamsayı tanımımıza göre $n^2 = 2b + 1$ eşitliğini sağlayan bir b tamsayısının olduğunu göstermek istiyoruz.
Ama eğer $n = 2a + 1$ ise $n^2 = (2a + 1)^2 = 4a^2 + 4a + 1 = 2(a^2 + 2a) + 1$ olmalı.
O halde eğer $b = 2a^2 + 2a$ olsun dersek $n^2 = 2b + 1$ olur.
Sonuç: Sonuç olarak n^2 de tek tamsayı tanımımızdan dolayı bir tek tamsayı olur. $\square$

İşte bu kadar. Koşullu önermedeki varsayımı yaptık, ihtiyacımız olan tanıma yer verdik, tanımdan yola çıkarak işlemler, çıkarımlar yaptık ve nihayetinde koşullu önermenin işaret ettiği sonuca ulaştık. Kanıtımızın teker teker örnekler için değil, bütün

[1] Burada harflerin sağ altına bir takım sayılar yazılması bazı okurların tuhafına gitmiş olabilir. Bunun çok mantıklı bir açıklaması var ve aslında bu yazım matematikte çok işe yarıyor. Benzer özelliklere sahip matematiksel objeleri isimlendirmek istediğimizde bu objelere x, y, z demektense bu benzerliği kolayca hatırlamak için bir harfin sağ altına sayılar (x_1, x_2, x_3 gibi) yazarız, buna indeks denir. Başka bir sebep de harflerin sonlu, sayıların sonsuz olması. Bizim örneğimizde a_1 ve a_2 bölünen sayılar, k_1 ve k_2 ise bu bölme işlemlerindeki kalanlar.

tek tamsayılar için geçerli olduğuna dikkat edin. Bunu herhangi bir tamsayının yerini tutacak n sembolüne borçluyuz. Bu sembol herhangi bir tamsayının yerini tutabildiği için, onunla yaptığımız işlemlerin de herhangi bir tamsayı için geçerli olmasına dikkat ettik. Matematikte soyut semboller kullanıp onlara anlamlar yüklemek şaşılacak derecede faydalıdır.

Bu kanıttan çıkardığımız dersler:

- Kanıtı yazmaya varsayımdan başlamak iyi bir başlangıç oldu.
- Varsayımdaki kavramların tanımlarına yer vermek matematiksel işlemler yapmamıza yardımcı oldu.
- Bu kavramların birden çok birbirine denk tanımları varsa, hangisi ile çalışmanın daha kolay olduğunu düşünüp ona göre bir tercih yapmak işimizi kolaylaştırabiliyor.
- Kanıtın son cümlesi, teoremde verilen sonuç olunca okuyucu açısından bir bütünsellik sağlanıyor.

Gördüğünüz gibi insanın “bu tabi ki de doğru” deyip hemen geçebileceği basit bir iddianın kanıtını yazmak epey bir emek isteyebiliyor. Matematik derslerinde “formül bu, şimdi şu örnekteki sayılar için formülü kullanın” tarzında yaklaşımlara alışkın olan çoğu insan için kanıt yazmak ilk başlarda çok zordur, çünkü çok daha fazla emek ister. Bu emeğin karşılığındaysa hem kendine güven, hem kendi zekana saygı kazanılır. Bu tarz alıştırmalarla başkalarından duyduğunuz formüllere olan bağımlılığınızı azaltıp kendi ayaklarınız üzerinde durmaya başlayabilirsiniz. Sonuçta formülü size söyleyenin yanlış hatırlamadığı, ya da bilerek yanlış söylemediği ne malum?

Şimdi Teorem 4.1.1’nin kanıtını başka bir bakış açısıyla ele alacağız ki ne yapıp ne yapmadığımız netleşsin. Göstermeye çalıştığımız her n tamsayısı için n^2’nin tek olduğu değildi. Örneğin eğer n sayısını 2 alırsak, $n^2 = 4$ olur ve 4 bir tek sayı değildir, dolayısıyla “$Q : n^2$ tektir” tek başına doğru bir önerme değildir. Bu önermeyi $P \implies Q$ şeklinde formüle edersek, biz Q önermesinin doğruluğunu kanıtlamadık. Kanıtladığımız şey “varsayım sağlandığında çıkarımın doğru olduğu”ydu, çıkarımın tek başına doğru olduğu değildi. Bu ayrım çok önemli. İşte size bir örnek:

Teorem 4.1.2. *4 tek ise 6 da tektir.*

İlk düşünceler

Örnek ilk düşünceler

4'ün tek olmadığını, çift bir tamsayı olduğunu biliyoruz. Ama bu hiç mühim değil. Teorem bize 4'ün tek mi çift mi olduğu konusunda bir şey söylemiyor. Sadece

Eğer 4 tek ise, o zaman 6 da tek olmalı

diyor. Bize düşen varsayımın doğru olduğunu farzedip teoremin sonucuna ulaşmak.

1. Deneme

Varsayım: 4 tek bir tamsayı olsun.
Varsayımdaki kavramın tanımı: O zaman $4 = 2k + 1$ eşitliğini sağlayan bir k tamsayısı olmalı.
Biz 6'nın tek bir tamsayı olduğunu, yani $6 = 2\ell + 1$ eşitliğini sağlayan bir tamsayı olduğunu göstermek istiyoruz.

$$6 = 4 + 2 = 2k + 1 + 2 = 2(k + 1) + 1$$

olduğu için ve $k + 1$ de bir tamsayı olduğu için $\ell = k + 1$ tamsayısının $6 = 2\ell + 1$ eşitliğini sağlayan bir ℓ tamsayısı olduğunu göstermiş oluruz.
Sonuç: O halde 6 tamsayısı tektir.

Bir kez daha altını çizmekte fayda var, yukarıdaki kanıtta "6 tamsayısının tek olduğu"nu kanıtlamadık,

Eğer 4 tamsayısı tek ise 6 tamsayısının da tek olduğunu

kanıtladık. Bu bildiğimiz matematik ile çelişmez. Biz teoremin sonucunun tek başına doğru olmadığını biliyoruz, ama aynı zamanda varsayımımızdan sonuca giden mantıksal bir yol bulduk. Eğer teoremin sonucu doğru mu diye kontrol etmek istersek, bildiğimiz aritmetikte varsayımımız doğru mu onu kontrol etmemiz gerek. Tek tamsayının tanımını kullanarak 4'ün bu tanımı sağlamadığını gösterebilirsiniz.

Kapsamlı matematik sistemleri pek çok teorem ile inşa edilir, bunlar hep bir varsayımdan bir sonuca ulaşan önermelerdir. Eğer sonuçların doğruluğu ile ilgileniyorsanız, çalıştığınız sistemin içinde varsayımlarınızın doğruluğunu kontrol etmeniz gerekir. Ve bu varsayımlar başka teoremlerin sonuçları olabilirler, örneğin teorem 4.1.2'nin varsayımı

2 tamsayısı tekse, 4 tamsayısı da tektir.

önermesinin sonucu olarak görülebilir. Yani teoremleri uçuca ekleye ekleye büyük bir yapı inşa ediyoruz. Dolayısıyla insan bu zincirin başı nerede, bu binanın temelleri sağlam mı diye merak ediyor. Aksiyomlar tam olarak burada devreye girerler.

$$P_0 \implies \cdots \implies P_{n-1} \implies P_n \implies P_{n+1} \implies P_{n+2} \implies \dots$$

Bu zincirin sol ucu sistemimizde doğruluğunu sorgulamadan kabul ettiğimiz önermelere, yani *aksiyomlara* bağlıdır. (Bu resim gerçekte düz bir çizgiden çok dallanıp budaklanan bir ağaca benzer.) Zincirin başındaki varsayım doğruysa, sonrasındaki bütün çıkarımlar da doğrudur. O yüzden hangi aksiyomları seçeceğimiz çok önemlidir. Bazen kesinlikle doğru olmasını istediğimiz önermeleri aksiyom olarak seçeriz, bazen de doğru olmasını çok istediğimiz kimi karmaşık sonuçlar varsa onlara sebebiyet verecek en basit aksiyomları ararız.

Şimdi doğrudan kanıt konusundaki ısınma turlarına devam edelim. Yine basit bir iddia ele alalım.

Teorem 4.1.3. *n tamsayısı çift ise $n^2 - 6n + 5$ tamsayısı tektir.*

İlk düşünceler

Örnek ilk düşünceler

n çiftse, n^2 de $6n$ de çifttir. İki çift tamsayının farkı bize yine bir çift tamsayı verir, çift artı tek de tek yapar. Bu da ispatı bitirir.

Yukarıdaki ispatta yazanları anlamaya çalıştığınızda ispata ikna olabilirsiniz ve ayaküstü bir sohbette bu ispatı yaptığınızda insanlar sizi mazur görebilirler. Fakat matematikte ispatları yazmak için daha yüksek standartlarımız var. Hem okuyacak kişiye olan saygıdan, hem de arada atladığımız bir durum olmadığına dikkat etmek için daha anlaşılır ve açıklayıcı kanıtlar yazarız. Üstelik sadece sizin arkadaşlarınızla aranızda kullandığınız jargondan seçtiğiniz kelimeleri kullanmanız da okurların ispatı anlamasını imkansız hale getirebilir. İspat yaparken dikkat etmemiz gereken en önemli noktalardan birisi yazdıklarımızın bizi hiç tanımayan, başka bir kültürden, başka bir yüzyıldan insanların da okuduğunda anlayabileceği şekilde yazmaktır. Bu sebeple kanıtımızı şimdi biraz daha açıklayıcı ve evrensel ifadelerle yazalım, tabii ki kanıtta bir tamsayının çift olmasının tanımına ihtiyacımız olacak:

Tanım 4.1.2. *Eğer bir n tamsayısı için $n = 2a$ eşitliğini sağlayan bir a tamsayısı varsa n tamsayısına çift denir.*

Kanıt.

Varsayım: n çift bir tamsayı olsun.
Varsayımdaki kavramın tanımı: O halde $n = 2a$ eşitliğini sağlayan bir $a \in \mathbb{Z}$ vardır.
$n^2 - 6n + 5$ ifadesinde n yerine $2a$ yazarsak: $(2a)^2 - (6 \times 2a) + 5$ sayısını elde ederiz.
Bu da $4a^2 - 12a + 5 = 2 \times (2a^2 - 6a + 2) + 1$ sayısına eşittir.
$b = 2a^2 - 6a + 2$ olsun dersek $n^2 - 6n + 5$ sayısını $2b + 1$ formunda yazabiliriz.
Sonuç: O halde $n^2 - 6n + 5$ bir tek tamsayıdır. □

Kanıtımız şu an derdini çok daha net bir şekilde ifade ediyor. Ancak dikkatli bir okur, bu kanıtın da bir çatlağı olduğunu görebilir. Kanıtın geçerli olması için b diye isimlendirdiğimiz sayının bir tamsayı olması gerektiğini görebiliyor musunuz? b'nin neden bir tamsayı olduğunu kanıtlayabilir misiniz?

Şimdi tamsayıların tekliği ya da çiftliği ile değil, birbirlerini bölme ilişkisi ile ilgili bir teoremi kanıtlamaya çalışalım.

Teorem 4.1.4. *a, b ve c tamsayıları için a, b'yi böler $(a \mid b)$ ve b, c'yi bölerse $(b \mid c)$ o zaman a, c'yi böler $(a \mid c)$.*

İlk düşünceler:

Bu durumda bazı okurlar a'yı 5, b'yi 7 alalım; 5, 7'yi bölmez ki diye düşünerek bu teoremin yanlış olduğu kanısına kapılabilirler. Okurların söylediği şeyin bir kısmı doğru, 5, 7'yi bölmez fakat bunun yukarıdaki teoremle bir ilgisi yok. Yukarıdaki teoremin varsayımına dikkat etmeliyiz. Teorem a'nın b'yi ve b'nin, c'yi böldüğü durumlar için bir çıkarımda bulunuyor. Bu koşulu sağlamayan sayılar hakkında hiç bir şey söylemiyor. Biz bu koşula uyan sayılarla ilgili ne sonuç çıkarabileceğimizle ilgileniyoruz.

Örnek ilk düşünceler:

Tamam, yıllardır bölme yaptığım için bu iddiada neyden bahsedildiğini biliyorum. Ama kanıtı yazabilmek için "a, b'yi böler" ifadesinin matematiksel tanımına ihtiyacım olacak. Bir işlemin nasıl yapıldığını bilmek ile matematiksel tanımını bilmek farklı şeyler. Bir önceki kanıtta bölme yerine çarpma kullanan bir tanım kullanarak işimi kolaylaştırmıştım. Acaba "a, b'yi böler." ifadesini çarpma kullanarak tanımlayabilir miyim?

Bu çok güzel bir başlangıç. Artık kanıt yazmak için tanımlara ihtiyacımız olduğunu, ve kimi tanımların diğerlerine göre daha işlevsel olabildiğini biliyoruz. Yaptığımız her kanıttan yeni bir şeyler öğreneceğiz. Şimdi "a, b'yi böler"i nasıl tanımlayabileceğimizi düşünelim.

Tanım 4.1.3. *a ve b birer tamsayı olsun. Eğer b'nin a'ya bölümünden kalan sıfırsa bu durumda a, b'yi böler deriz.*

Bu bir tanım, ancak sıfır ile bölemediğimiz için sadece a'nın sıfırdan farklı olduğu durumlar için geçerli. Hem bu sorunu aşmak için, hem de elimizde birden fazla tanım olması bize kanıt yazarken daha kolay bir çıkar yol bulmada yardımcı olabildiği için bir de şu tanımı yazalım.

Tanım 4.1.4. *a ve b birer tamsayı olsun. Eğer $b = a \times k$ eşitliği sağlayan bir $k \in \mathbb{Z}$ varsa bu durumda a, b'yi böler deriz ve bunu $a \mid b$ şeklinde yazarız.*

İkinci tanımda bir sayının diğerini bölmesini çarpma üzerinden tanımladığımıza dikkat edin. Çarpma işlemi bölmeden daha kolaydır. Sıfırı sıfıra bölüp bir tamsayı elde edemediğimiz halde, bu tanımdan dolayı "Sıfır sıfırı böler." önermesinin doğru olduğunu da görüyor musunuz? Ama sıfır bölü sıfırdan bahsedemiyoruz, çünkü o durumda $0 = 0 \times k$ eşitliğini sağlayan tek bir k tamsayısı yok.

1.Deneme

Varsayım: $a, b, c \in \mathbb{Z}$ ve $a \mid b$ ve $b \mid c$ olduğunu varsayalım.
Varsayımdaki kavramların tanımı: Bu, tanım olarak $b = a \times k$ ve $c = b \times \ell$ eşitliğini sağlayan k ve ℓ tamsayıları var demek.
Ben $a \mid c$ olduğunu göstermek istiyorum.
$\vdots$
Yani $c = a \times m$ eşitliğini sağlayacak bir m tamsayısı vardır.
Sonuç: O halde a, c'yi böler.

Harika bir başlangıç. İddiamızdaki varsayımı yazarak başladık. Bu varsayımda geçen kavramların kanıtta kullanabileceğimiz tanımlarını ifade ettik. Ve kanıtta ne yönde ilerlemek istediğimizi hatırlattık. Buraya kadar yaptığımız işlerin çok mekanik olduğuna dikkat edin. Doğrudan ispat yöntemiyle yazacağınız bütün kanıtlara bu şekilde başlayabilirsiniz. Hatta kanıtınıza direk bu şablonu uygulayarak başlarsanız çok iyi bir alışkanlık edinmiş olursunuz. Hangi sonuca ulaşmak istediğimizi de biliyoruz, hatta o sonuçtan bir adım öncesine gidip aradığımız sonucu matematiksel bir tanım cinsinden de yazdık. Şimdi kanıtın can alıcı olan düşünme kısmına geldik. Aradığımız gibi bir m tamsayı bulmak için nasıl işlemler yapabiliriz? Bu aşamada elimizdeki ifadelerle oynayıp neler elde edebildiğimizi keşfe çıkmalıyız.

Kanıt.
Varsayım: $a, b, c \in \mathbb{Z}$ ve $a \mid b$ ve $b \mid c$ olduğunu varsayalım.
Varsayımdaki kavramların tanımı: Bu, tanım olarak $b = a \times k$ ve $c = b \times \ell$ eşitliğini sağlayan k ve ℓ tamsayıları var demek.
İstediğim: Ben $a \mid c$ olduğunu, yani $c = a \times m$ eşitliğini sağlayacak bir m tamsayısı olduğunu göstermek istiyorum.
Elimde $b = a \times k$ ve $c = b \times \ell$ eşitlikleri var, k ve ℓ soruda verilmemiş, benim kanıt için ortaya attığım birer tamsayı.
Mesela ikinci eşitlikte b yerine ilk eşitlikteki ifadeyi yazabilirim.
Bu da bana $c = (a \times k) \times \ell$ eşitliğini verir.
Çarpma işlemi birleşmeli olduğu için $c = a \times (k \times \ell)$ olur.
Eğer $m = k \times \ell$ olsun dersek $c = a \times m$ eşitliğini sağlayan bir m tamsayısı bulmuş oluruz.
Sonuç: O halde bölme tanımımızdan dolayı a, c'yi böler. $\square$

İşte bu kadar, iyi bir başlangıçtan sonra biraz uğraşarak ikinci denemede kanıtımızı tamamladık. Özellikle kanıt yazma konusunda yeni olanların akıllarından geçen düşüncelerin hemen hepsini kağıda dökmeleri çok önemli. Maalesef günümüzdeki matematik kültüründe çoğu kitapta insan anlayışı için çok önemli olan bu düşüncelere yer verilmiyor. Örneğin yukarıdaki kanıtı mantıksal minimalizm ile yazarsak şöyle görünür:

$$a \mid b \ \wedge \ b \mid c \implies \exists k, \ell \in \mathbb{Z}\colon (b = a \times k) \wedge (c = b \times \ell = (a \times k) \times \ell = a \times (k \times \ell)) \implies a \mid c.$$

Yerden tasarruf ederken iletişimden ne kadar kaybettiğimizi fark etmişsinizdir.

Şimdi bir kez daha $P \implies Q$ koşullu önermesinin doğru olması için, P'nin ve Q'nun tek başına doğru olması gerekmediğini hatırlayalım.

Teorem 4.1.5. *6, 7'yi bölerse 3, 10'u böler.*

Bu sefer ilk düşünceler için daha büyük bir kutu bırakıyoruz. Bu teoremi okuduğunuzdaki düşüncelerinizi ve hissettiklerinizi (!) yazabilirsiniz, insanın matematik yaparken zaman zaman rahatlamaya ihtiyacı olabiliyor.

İlk düşünceler

Evet, evet, merak etmeyin, hissettiklerinizin farkındayız ve onları anlıyoruz. İçimizi rahatlatacak nokta şu: biz ne 6'nın 7'yi böldüğünü ne de 3'ün 10'u böldüğünü göstermeye çalışıyoruz.

Örnek ilk düşünceler:

6'nın 7'yi bölmediğini biliyorum, ve 3'ün 10'u bölmediğini de biliyorum. Ama bunların bir önemi yok, benim kontrol etmeye çalıştığım şey eğer 6'nın 7'yi böldüğünü varsayarsam, bunun sonucu olarak 3'ün 10'u bölmesi gerektiği.

Kanıt.
6'nın, 7'yi böldüğünü varsayalım. O zaman tanım gereği

$$7 = 6 \times k$$

eşitliğini sağlayan bir k tamsayısı olmalı. Bakın böyle bir k tamsayısının var olduğunu söylemiyoruz, sadece böyle bir k tamsayısının var olduğunu varsayıyoruz.
Ulaşmak istediğimiz sonucu tekrar düşünelim: 3, 10'u böler. Dolayısıyla biz

$$10 = 3 \times \ell$$

eşitliğini sağlayan bir ℓ tam sayısı arıyoruz. Eşitliklerin sol tarafındaki sayılar arasında 3 fark olduğuna dikkat edin. Eşitliklerin sol tarafını benzetmek için ilk eşitliğe 3 ekleyebiliriz. Böylece elimize

$$10 = (6 \times k) + 3 = 6k + 3$$

eşitliği geçer. Şimdi geriye ufak bir işçilik kaldı. Bulmaya çalıştığımız şey 10'u 3'ün bir katı olarak yazıp yazamayacağımızdı. O zaman eşitliğin sağ tarafını 3 parantezine alırsak

$$10 = 3 \times (2k + 1)$$

olur. Dolayısıyla 3, 10'u böler ve bu da ispatımızı bitirir. □

Bu teoremi ($P \implies Q$) şeklinde düşünürsek

$$P : \text{« } 6, 7\text{'yi böler. »}$$
$$Q : \text{« } 3, 10\text{'u böler. »}$$

olur.

Lisede mantık dersinde yaptıklarımızı ufak bir dönüş yapalım. P önermesinin ve Q önermesinin doğruluk değerleri yanlış olduğunda $P \implies Q$ önermesi doğrudur. Dolayısıyla kanıtlayabilmiş olmamıza çok da şaşırmalı.

Şu ana kadar teoremlerimizin tamsayılarla ilgili olduğuna ve bu sayıların yerini tutması için a, b, c ya da k, ℓ, m, n harflerini kullandığımıza dikkat edin. Mantıksal olarak fark etmese de, belli sembolleri hep aynı kavramlar için kullanmak psikolojik açıdan çok önemlidir. Örneğin hemen herkes Pisagor teoremini $a^2 + b^2 = c^2$ olarak hatırlar, a, b ve c doğal sayılardır. Oysa Pisagor teoremi tabii ki iki dik kenarı $\sqrt{2}$ ve hipotenüsü 2 birim uzunluktaki üçgenler için de geçerlidir.

Biz de yazılarımızda a, b, c ya da k, ℓ, m, n harflerini tamsayılar için kullanmaya, gerçek sayılar içinse x, y, z harflerini kullanmaya dikkat edeceğiz. İşte gerçek sayılarla ilgili ilk teoremimiz:

Teorem 4.1.6. *x ve y sıfırdan büyük eşit gerçel sayıları için $2\sqrt{xy} \leq x + y$ olur.*

İlk düşünceler

Eşitsizlikleri kanıtlamak eşitliklere göre biraz daha zordur. Böyle sorularda eşitsizliğin bir tarafını 1 ya da 0 gibi değerini bildiğimiz bir sabite çevirmenin faydası olabilir. Bunun için ya iki taraftan da aynı ifadeyi çıkarmak, ya da iki tarafı da aynı ifadeye bölmek (ve sıfıra bölmediğimize dikkat etmek) gerekir.

Örnek ilk düşünceler:

Eşitliğin iki tarafını da $2\sqrt{xy}$'ye bölersem $1 \leq \frac{x+y}{2\sqrt{xy}}$ olur. Tabi burada x'in ya da y'nin sıfır olmadığını varsaydım. Üstelik yeni elde ettiğim eşitsizlikle ne yapabileceğimi de bilmiyorum.

1. Deneme

Varsayım: x, y sıfırdan büyük birer gerçek sayı olsunlar. Eşitliğin iki tarafından da $2\sqrt{xy}$ çıkaralım:

$$0 \leq x + y - 2\sqrt{xy}$$

Eşitliğin sağ tarafının pozitif olduğunu iddia etmek için onu bir şeyin karesi olarak yazmak iyi olabilir, ama ortada x^2 ya da y^2 terimleri yok. O halde x ve y'li bir terimin karesi değil. Ama aslında x dediğimiz $\sqrt{x}$'in karesidir. O zaman bir hesap yapalım:

$$(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 = x - 2\sqrt{xy} + y$$

Bu tam olarak ilk eşitsizlikteki ifade.

Şimdi bu fikirleri toparlayıp kanıtı düzgünce yazalım.

Kanıt.
Varsayım: x, y sıfırdan büyük birer gerçek sayı olsunlar. x ve y pozitif gerçek sayılar olsunlar.
O zaman $\sqrt{x}$ ve $\sqrt{y}$ sayıları da pozitiftir.
Bu iki sayının farkının karelerini alalım, yani $(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2$. Herhangi bir gerçel sayının karesi 0'dan büyük eşit olacağı için şöyle yazabiliriz:

$$(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \geq 0$$

Kare alma işlemini yapalım:

$$x - 2\sqrt{xy} + y \geq 0$$

$2\sqrt{xy}$'yi karşı tarafa atarsak

Sonuç: $x + y \geq 2\sqrt{xy}$ eşitsizliğini elde ederiz. □

Yukarıdaki kanıtımızın hiç bir eksiği yok, ama bir fazlası var. Kanıttaki fazlalığı görebiliyor musunuz?

Varsayımdan hemen sonra yer verdiğimiz "O zaman $\sqrt{x}$ ve $\sqrt{y}$ sayıları da pozitiftir." gözleminden kanıt boyunca hiç faydalanmadık. Dolayısı ile bu gözlemin kanıtımıza bir etkisi yok. Mantıksal bütünlüğü, fikirler arasındaki geçişleri ve anlaşılırlığı ön plana çıkarmak için bu tarz gereksiz öğelere kanıtlarda yer vermeyiz. Bir şekilde düşünme aşamasında böyle gözlemler yapıp bir kenara not almış olsak da, en son kanıtımızı temize çekerken yazdığımız her şeyin gerçekten gerekli olduğunu kontrol ederiz.

Bu bölümde yaptığımız çalışmaların sonucunda bir kanıtta olmasını istediğimiz özellikler bulduk:

1. Kanıtta varsayıma yer vererek başlamak istiyoruz.
2. Varsayımda bahsi geçen kavramların tanımlarına yer vermek istiyoruz.
3. Ara adımlarda varsayımdan ve verdiğimiz tanımlardan yararlanmış olmak istiyoruz.
4. Kanıtta gereksiz kısımlar olmasın istiyoruz.
5. Kanıtı teoremdeki sonuç ile bitirmek istiyoruz.
6. Gerekçeleri iyi açıklanmamış, eksik kalmış çıkarımlar olmasın istiyoruz.
7. Kanıtta kullandığımız a, b, n, k, x, y gibi sembollerin hangi kümenin elemanları yerine geçtiğini belirtmiş olmak istiyoruz.

İleride kendi yapacağınız kanıtlarda bu özellikleri aklınızın bir ucunda bulundurarak kendi yazdıklarınızi gözden geçirebilirsiniz.